Ciągi liczbowe

Omówiliśmy już kilka rodzajów funkcji.

Za każdym razem należało wyznaczyć dziedzinę funkcji

Definicja 1

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Wartości zdefiniowanych powyżej funkcji nazywamy WYRAZAMI CIĄGU.

Ciąg liczbowy to ciąg, którego wyrazy są liczbami rzeczywistymi.

Zwykle wyrazy ciągu zapisujemy inaczej od wartości innych wcześniej poznanych funkcji

Dla przykładu, jeśli rozważymy ciąg, który każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje liczbę trzy razy większą, to zamiast pisać:

$f(1)=3 \quad f(2)=6 \quad f(3)=9 \quad \ldots \qquad f(n)=3n \quad \ldots$

Zwyczajowo piszemy:

$a_1 =3 \quad a_2 =6 \quad a_3 =9 \quad \ldots \qquad a_n =3n \quad \ldots$

Wyraz n-ty ciągu "$a_n =3n$" to wyraz ogólny.

Dzięki niemu możemy obliczyć dowolny wyraz ciągu

Przykład 1

Obliczmy wyrazy a_1 a_3 ciągu, którego wyraz ogólny ma postać:

$$a_n = \frac{n^2}{n+2}$$

Aby obliczyć a_1 – należy wstawić 1 do wyrazu ogólnego w miejsce n,

$$a_1 = \frac{1^2}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Analogicznie:

$$a_3 = \frac{3^2}{3+2} = \frac{9}{5}$$

Obliczmy wyrazy a_2 a_4 ciągu

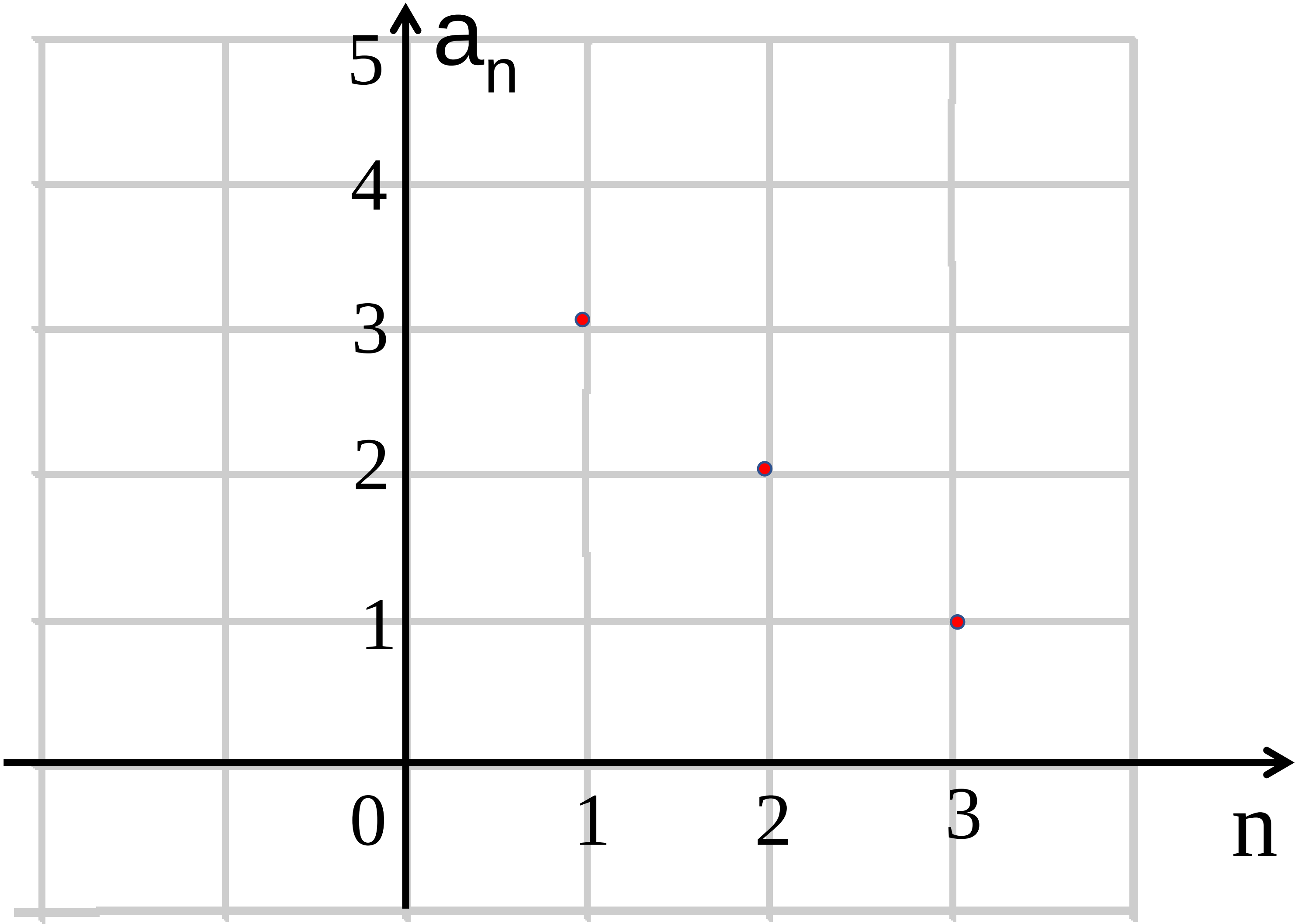
$$a_n = \frac{1}{2}(n - 4)$$

$$a_n = 3 - n^2$$

Wykres ciągu

$a_n = -n + 4$

n	1	2	3
a_n	3	2	1



Monotoniczność ciągów

Definicja 1.

Ciąg a_n nazywamy ciągiem rosnącym wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1}>a_n$

Potocznie mówimy, że ciąg a_n jest rosnący gdy każdy jego wyraz jest większy od poprzedniego (oprócz pierwszego)

Analogicznie jest z ciągiem malejącym jak i stałym.

Definicja 2.

Ciąg a_n nazywamy ciągiem malejącym wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1}<a_n$.

Mówimy, że ciąg a_n jest malejący gdy każdy jego wyraz jest mniejszy od poprzedniego (oprócz pierwszego)

Definicja 3.

Ciąg a_n nazywamy ciągiem stałym wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest równość $a_{n+1}=a_n$.

Przykład

Zbadamy, czy ciąg nieskończony o wyrazie ogólnym $a_n = 2n-3$ jest rosnący, czy malejący.

Żeby udowodnić, że ciąg jest rosnący, to należy pokazać, że **dla dowolnego** $n \in N+$ zachodzi:

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

Do wykonania takiego zadania należy umieć zapisać wzór na wyraz a_{n+1} ciągu. W tym celu wystarczy podstawić we wzorze an w miejsce n wyrażenie n+1

$$a_{n+1} = 2(n+1) - 3$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n+2-3-(2n-3) = 2n-1-2n+3 = 2 > 0$$

zatem ciąg jest rosnący

Praca domowa

Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{12n-3}{n+2}$ są równe zeru?

Które wyrazy ciągu $a_n = 2n + 2$ są równe 7? Zbadaj jego monotoniczność