ELEMENTY KOMBINATORYKI

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: "ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?", "Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 28 osobowej?", itp.

Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami.

Na szczęście nie trzeba pamiętać tych wszystkich wzorów, aby szybko i skutecznie rozwiązywać zadania z kombinatoryki.

Do rozwiązania większości zadań w zupełności wystarcza **reguła mnożenia** i wzór na **kombinacje**.

Reguła mnożenia

Reguła mnożenia przydaje się podczas rozwiązywania wielu zadań z kombinatoryki.

Omówimy ją na konkretnych przykładach.

Przykład 1

Rzucamy trzy razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

Możliwe wyniki to np.: (Orzeł,Orzeł,Reszka), (O,R,R), (R,O,R), (R,R,R)...

Zatem:
W **I rzucie** może wypaść orzeł lub reszka, czyli są **2** możliwości.

W **II rzucie** również może wypaść orzeł lub reszka, czyli są **2** możliwości.

W **III rzucie** również może wypaść orzeł lub reszka, czyli są **2** możliwości.

Reguła mnożenia mówi, że w takiej sytuacji mamy: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Przykład 2.

W każdym rzucie możemy otrzymać 2 wyniki: Orzeł albo Reszka

W pierwszym rzucie mamy 2 *możliwości i w drugim rzucie mamy* 2 *możliwości i w trzecim rzucie mamy* 2 *możliwości... i w dziesiątym rzucie mamy* 2 *możliwości.*

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10 \text{ razy}} = 2^{10}$$

Przykład 3.

Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Ile jest możliwych wyników?

W każdym rzucie możemy otrzymać jeden z sześciu wyników.

W pierwszym rzucie mamy 6 *możliwości i w drugim rzucie mamy* 6 *możliwości i w trzecim rzucie mamy* 6 *możliwości.*

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$

Przykład 4.

Rzucamy 5 razy sześcienną kostką do gry. Ile jest możliwych wyników?

W każdym rzucie możemy otrzymać jeden z sześciu wyników.

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$$

Silnia

Silnię liczby naturalnej n oznaczamy symbolem n! i definiujemy jako iloczyn kolejnych liczb naturalnych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Przykład 1.

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Przykład 2.

$$\frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{\cancel{8!} \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{8!} \cdot 2} = 9 \cdot 5 = 45$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 8! \cdot 9 \cdot 10$$

Kombinacja

Kombinacja pozwala policzyć na ile sposobów można wybrać k elementów z n-elementowego zbioru.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykład 1.

Na ile sposobów można wybrać 2 osoby w klasie 30 osobowej?

$$C_{30}^2 = \frac{30!}{2!(30-2)!} = \frac{30!}{2 \cdot 28!} = \frac{28! \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 28!} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 15 \cdot 29 = 435$$

Przykład 2.

Na ile sposobów można wybrać 3 zawodników w drużynie 12 osobowej?

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{6 \cdot 9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{6 \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 10 \cdot 11 \cdot 2 = 220$$

Przykład 3.

Klasa liczy 10 dziewczynek i 8 chłopców. Na ile sposobów możemy wybrać z tej klasy czteroosobową delegację, jeśli ma się znajdować w niej co najmniej jedna dziewczynka?

Ten przykład możemy w prosty sposób wyliczyć, wyznaczając liczbę wszystkich możliwych delegacji i odejmując od tej liczby liczbę delegacji złożonych wyłącznie z chłopców

$$C_{18}^{4} = \frac{18!}{4!\,(18-4)!} = \frac{18!}{4!\,14!} = \frac{14!\,15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 14!} = 3060$$

Liczba delegacji złożonych wyłącznie z chłopców wynosi:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{6!\,7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6!} = 70$$

Aby otrzymać liczbę czteroosobowych delegacji odejmujemy liczbę delegacji złożonych wyłącznie z chłopców od łącznej liczby delegacji.

$$C_{18}^{4} - C_{10}^{4} = 3060 - 70 = 2990$$